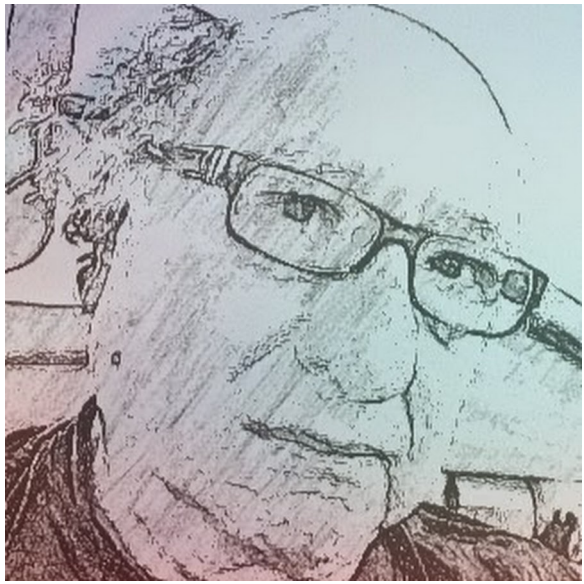
Manuel López Mateos

PROPIEDADES BÁSICAS del ANÁLISIS en $\mathbb{R}$

López Mateos editores



Manuel López Mateos

Manuel López Mateos

Propiedades básicas del análisis en $\mathbb{R}$

López Mateos editores

2018

Ilustración de la tapa:

Detalle de *Raniriposa*, acrílico en cartonería. Manuel S. Lopez-Mateos, 2012.

Segunda edición, 2018, en López Mateos Editores
©2018 López Mateos Editores, s.a. de c.v.
Matamoros s/n
Primera sección
Xadani, Oax
C.P. 70125
México

ISBN 978-607-95583-7-6

Información para catalogación bibliográfica:

López Mateos, Manuel.
Propiedades básicas del análisis en $\mathbb{R}$ / Manuel López Mateos, 2a ed.
iv–25 p. cm.
ISBN 978-607-95583-7-6
1. Matemáticas 2. Análisis matemático 3. Números reales—Propiedades básicas 4. Axioma del Supremo 5. Teorema del encaje I. López Mateos, Manuel, 1945- II. Título.

Todos los derechos reservados. Queda prohibido reproducir o transmitir todo o parte de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabado o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información, sin permiso de López Mateos Editores, s.a. de c.v.

Producido en México

https://propbas.mi-libro.club

ISBN 978-607-95583-7-6

Índice general

Introducción **vi**

1 La recta real **1**
1.1. Axioma de Dedekind 1
1.2. Teorema del encaje 5
1.3. Principio del punto de acumulación 8
1.4. Teorema de Heine-Borel 10

2 Funciones continuas **14**
2.1. Teorema del valor intermedio 14
2.2. Teorema de Bolzano 17
2.3. Teorema del máximo 20
2.4. Teorema de la continuidad uniforme 21

Bibliografía **23**

Índice alfabético **24**

Introducción

Este folleto contiene las notas de una conferencia impartida por el autor el 3 y 7 de abril de 1978 en la Facultad de Ciencias Exactas y Geografía de la Universidad de La Habana. Se publicó en la serie Conferencias de la colección Vínculos Matemáticos 16-1992 del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Los cambios han sido mínimos, simplemente para facilitar la lectura de algunas líneas.

Encuentro útil este material para ilustrar ciertas técnicas de demostración usadas en análisis elemental. Para demostrar teoremas básicos sobre funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, se emplean razonamientos basados en el axioma del supremo, en el teorema del encaje y en una versión infantil de las cortaduras de Dedekind.

Espero que sea de utilidad para maestros y estudiantes.

Agradezco a Rodolfo Alcaraz Iriberri por su participación en la corrección de errores de la presente edición.

Manuel López Mateos
manuel@cedmat.net
http://cedmat.net
9 de diciembre de 2018

Capítulo 1

La recta real

1.1. Axioma de Dedekind

La ponencia tiene por objeto exhibir la manera como incorporamos nuestra concepción intuitiva de *recta* a la definición axiomática de los números reales vía el Axioma de Dedekind (o alguno equivalente como el del supremo) y cómo de ahí podemos generar técnicas para demostrar propiedades de funciones continuas definidas en intervalos cerrados finitos que constituyen, al fin de cuentas, versiones de distinto tipo acerca de nuestra consideración de la recta como un *continuo* y que involucran ya el concepto de función y de continuidad.

La importancia de esta visión acerca de ciertas propiedades básicas radica en el hecho de presentar a los números reales más allá de un acartonado conjunto de axiomas.

Las propiedades de campo ordenado y arquimediano que caracterizan algebraicamente a los números reales nos aparecen claras y necesarias a partir del afán de obtener operaciones cerradas. Su descripción como el conjunto de todas las expansiones decimales (vamos a exceptuar las colas de nueves) la entendemos a partir de medir longitudes.

Sin embargo, la estructura algebraica de los racionales conforma también un campo ordenado, ¡denso! y arquime-

diano; es claro que podemos acercarnos tanto como queramos a la longitud de un segmento usando exclusivamente sucesiones de racionales.

La limitación de trabajar con los racionales se manifiesta al notar que no constituyen un *buen modelo* de la recta (no son suficientes para representar *cada* punto de la recta); y es que así definidos, los racionales tienen huecos mientras que nosotros concebimos a la recta como *continua*, sin huecos.

En términos formales podemos expresar esa *oquedad* de los racionales corroborando la posibilidad de *descomponerlos* en conjuntos A y B no vacíos, ajenos, cuya unión sea $\mathbb{Q}$ y tales que

$$a \in A \ \text{ y } \ b \in B \Rightarrow a < b,$$

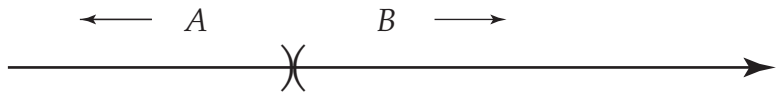


Figura 1.1 Cada elemento de A es menor que cada elemento de B.

con la propiedad de que A no tenga elemento máximo ni B tenga elemento mínimo. Por este procedimiento estaríamos localizando un *hueco*. En términos burdos, la *oquedad* en los racionales significa que si damos un tajo, un corte en la recta, podemos irnos *a través* sin tocar un racional.

Por ejemplo, si definimos el conjunto A como los racionales negativos, el cero y los racionales positivos de cuadrado menor que 2 y el conjunto B como los racionales positivos de cuadrado mayor que 2, será fácil corroborar que

$A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$; $a \in A$ y $b \in B \Rightarrow a < b$,

A no tiene elemento máximo y B no tiene elemento mínimo.

Insistiendo en considerar la recta como un *continuo*, si el procedimiento anterior caracteriza a los huecos, en nuestro

afán de buscar un *buen modelo* para la recta podemos exigir de los reales, además, que donde demos *tajos* nos encontremos con algún real.

¡Esto es lo que está detrás del axioma de Dedekind! Enunciémoslo:

1.1. Axioma. (de Dedekind[1]) *Consideremos los reales clasificados según dos conjuntos* A *y* B*, no vacíos, ajenos, cuya unión sea* $\mathbb{R}$ *y tales que*

$$a \in A \quad y \quad b \in B \;\Rightarrow\; a < b.$$

Entonces existe un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* α *es el máximo de* A *o el mínimo de* B*, y*

$$x < \alpha \;\Rightarrow\; x \in A, \quad \alpha < x \;\Rightarrow\; x \in B.$$

Al punto α *le llamaremos punto de corte.*

¿Quiénes son entonces los números reales?: Un campo ordenado, arquimediano y que cumple el axioma de Dedekind, es decir *continuo*. Describir así a los reales es como afirmar: "Para nosotros los reales son como las rectas".

Veamos cómo partiendo de esto podemos desarrollar técnicas claras y con valor didáctico para demostrar algunas propiedades básicas.

Hemos expuesto hasta aquí una presentación breve de los reales (sólo un aspecto, su completez).

La insistencia en el tipo de presentación se debe a que tradicionalmente los estudiantes conciben a los reales como un conjunto de axiomas algebraicos y de orden más un misterioso axioma del supremo. Al no resaltar la diferencia de

[1] "La más profunda y más importante de las propiedades fundamentales de los números reales", Landau, *Differential and Integral Calculus*, página 9.

trabajar con $\mathbb{Q}$ o con $\mathbb{R}$ (aunque se diga que $\mathbb{Q}$ no cumple tal misteriosa propiedad) nos podemos topar con dificultades al explicar las propiedades que veremos a continuación.

En primer lugar demostremos la equivalencia entre el axioma de Dedekind y del supremo. Supondremos válido el axioma de Dedekind y demostraremos la siguiente

1.2. Proposición. (Axioma del Supremo). *Si* C *es un conjunto no vacío de números reales acotado superiormente entonces existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha = \sup C$.

La demostración consistirá en localizar el punto de corte generado por el conjunto de las cotas superiores de C y su complemento, probaremos entonces que el corte es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de C y por lo tanto el supremo de C.

Demostración. Definamos el conjunto B como el conjunto de números reales que son cota superior del conjunto C en cuestión y A como el complemento de B.

Corroboremos que los conjuntos A y B constituyen una descomposición de $\mathbb{R}$ según el axioma de Dedekind:

i) B es no vacío porque C está, por hipótesis, acotado superiormente, es decir existe al menos una cota superior de C y por lo tanto al menos un elemento en B.
A es no vacío: si $c \in C$ consideremos $a \in \mathbb{R}$ con $a < c$; a no es cota superior de C ya que es excedida por c.
Por lo tanto $a \notin B$, es decir $a \in A$.

ii) Claramente $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{R}$.

iii) Si $a \in A$ y $b \in B$ no podemos tener $b \leqslant a$.
Si fuera el caso, como $a \in A$ no es cota superior de C, existe entonces algún $c \in C$ tal que $a < c$.
Tendríamos así $b < c$ contradiciendo que $b \in B$.
Tenemos entonces que $a < b$.

En efecto, A y B constituyen dicha descomposición, por lo tanto existe un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que α es el máximo de A o el mínimo de B, y

$$x < \alpha \Rightarrow x \in A, \quad x > \alpha \Rightarrow x \in B.$$

Afirmamos que $\alpha \notin A$ ya que si $\alpha \in A$ entonces α no sería cota superior de C y podríamos encontrar $c \in C$ con $\alpha < c$. De aquí

$$\alpha < \frac{\alpha + c}{2} < c.$$

Ahora bien,

$$\alpha < \frac{\alpha + c}{2} \text{ por lo tanto } \frac{\alpha + c}{2} \in B,$$

pero $\alpha < \frac{\alpha+c}{2} < c$, por lo tanto no es cota superior de C y $\alpha < \frac{\alpha+c}{2} \in A$ contradiciendo el hecho de que $A \cap B = \emptyset$.

Tenemos entonces que $\alpha \in B$ y es, por el axioma de Dedekind, su elemento mínimo (α es el máximo de A o el mínimo de B).

Hemos localizado un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ que es el mínimo de las cotas superiores de C, es decir

$$\alpha = \sup C. \qquad \blacklozenge$$

Del procedimiento empleado en esta demostración podemos fácilmente desprender una demostración de la proposición inversa.

1.2. Teorema del encaje

Al contar con estos principios equivalentes como la característica *en última instancia* de los números reales podemos, con base en ellos, es decir teniendo presente, usando la concepción de los reales como un *continuo*, desarrollar una primera técnica muy interesante expresada en el teorema del encaje.

La importancia del teorema radica en que nos permitirá, al considerar sucesiones de intervalos donde cada uno está contenido en el anterior, localizar a puntos en $\mathbb{R}$ con determinada propiedad, *acorralándolo*

Respecto a los intervalos, diremos que $\{J_n\} = \{[a_n, b_n]\}$ es una sucesión decreciente de intervalos cerrados si

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \cdots .$$

Esto lo podemos expresar también de la siguiente manera:

$$\text{Si } \ m > n \ \text{ entonces } \ J_n \supseteq J_m.$$

2.1. Teorema. (del encaje). *Si* $\{J_n\} = \{[a_n, b_n]\}$ *es una sucesión decreciente de intervalos cerrados y acotados, entonces existe algún* $\alpha \in \mathbb{R}$ *común a todos ellos.*

Demostración. Denotaremos con A el conjunto de extremos izquierdos a_n de los intervalos y con B el conjunto de los extremos derechos b_m.

Claramente $a_n < b_m$ para cualquier n y m.

Esto nos indica que el conjunto A está acotado superiormente y el B inferiormente ya que cada elemento de B es una cota superior de A y cada elemento de A es una cota inferior de B.

Por el axioma del supremo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con la propiedad

$$\alpha = \sup A.$$

Aseguramos que

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n.$$

El número α es mayor o igual que cada a_n porque es cota superior de A.

El número α es menor o igual que cada b_n porque las b_n son cotas superiores de A y α es la mínima.

Tenemos entonces que

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Es decir

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n. \qquad \blacklozenge$$

Debemos notar que del teorema no podemos desprender la unicidad de α más que fortaleciendo las hipótesis.

Si exigimos que la longitud de los intervalos de la sucesión tienda a cero podremos comprobar la unicidad, es decir, si la sucesión decreciente de intervalos es tal que

$$l(J_n) = b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tendremos que α es único.

En efecto, ya que si α y α' son dos puntos que pertenecen a cada J_n (supongamos que $\alpha \leqslant \alpha'$) tendremos

$$0 \leqslant \alpha' - \alpha \leqslant l(J_n), \text{para cada } n.$$

Luego

$$l(J_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ implica que } \alpha = \alpha'.$$

Este punto α único tiene la propiedad de que cualquier vecindad abierta de α contiene algún J_n. Es fácil ver que sólo un número finito de los intervalos J_n están fuera de cualquier vecindad de α.

Sea pues $V_\varepsilon(\alpha)$, $\varepsilon > 0$, una vecindad abierta con centro en α y radio ε. Localizaremos algún intervalo J_n tal que $J_n \subseteq V_\varepsilon(\alpha)$.

Al suponer que

$$l(J_n) = b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tenemos que $\alpha = \sup A = \inf B$. Por lo tanto $\alpha - \varepsilon$ el extremo izquierdo de la vecindad no es cota superior de A y entonces hay algún a_m que cumpla

$$\alpha - \varepsilon < a_m < \alpha.$$

Análogamente, $\alpha + \varepsilon$ no es cota inferior de B y entonces hay algún b_p que cumpla

$$\alpha < b_p < \alpha + \varepsilon.$$

Si hacemos $n = \max\{m, p\}$ podemos asegurar que

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha < b_n < \alpha + \varepsilon,$$

es decir que $[a_n, b_n] = J_n \subseteq V_\varepsilon(\alpha)$.

Podemos reenunciar el teorema incorporando todo lo anterior.

2.2. Teorema. (del encaje). *Si* $\{J_n\} = \{[a_n, b_n]\}$ *es una sucesión decreciente de intervalos cerrados y acotados tal que*

$$l(J_n) = b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ ***único*** *común a todos ellos tal que cualquier vecindad* $V_\varepsilon(\alpha)$ *contiene algún* J_n.

1.3. Principio del punto de acumulación

Ilustraremos la utilidad del teorema del encaje al demostrar el principio del punto de acumulación de Bolzano-Weierstrass considerado por Courant como "jugador del papel principal en la discusión rigurosa de los fundamentos del análisis".

3.1. Teorema. (de Bolzano-Weierstrass). *Si C es un conjunto de números reales, infinito y acotado, entonces existe al menos un número real que es punto de acumulación de C.*

Demostración. Denotemos con $J_1 = [a_1, b_1]$ al intervalo cuyo extremo izquierdo y derecho es, respectivamente, una cota inferior y una cota superior de C. Claramente $C \subseteq J_1$ donde $l(J_1) = b_1 - a_1$. Sea m_1 el punto medio de J_1, es decir

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Podemos afirmar que en alguno de los dos subintervalos (al menos uno) $[a_1, m_1]$ o $[m_1, b_1]$ contiene una infinidad de puntos de C (de contener cada uno sólo un número finito de puntos de C la unión, que es J_1 contendría a su vez sólo un número finito de puntos de C).

Llamamos J_2 a dicho subintervalo (si los dos contienen una infinidad de puntos de C elegimos cualquiera). Tenemos que

$$J_1 \supseteq J_2 \quad \text{y} \quad l(J_2) = \frac{1}{2} l(J_1) = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Subdividamos J_2 a la mitad generando dos intervalos. El mismo argumento expuesto arriba entre paréntesis nos conduce a asegurar que alguno de los dos intervalos contiene una infinidad de puntos de C. Sea J_3 dicho intervalo. Claramente

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \quad \text{y} \quad l(J_3) = \frac{1}{2} l(J_2) = \frac{b_1 - a_1}{2^2}.$$

Repitiendo el procedimiento seleccionamos J_4, vemos que

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq J_4 \quad \text{y} \quad l(J_4)) = \frac{b_1 - a_1}{2^3}.$$

Al continuar *ad infinitum* este procedimiento habremos generado una sucesión $\{J_n\}$ donde cada J_n contiene una infinidad de puntos de C. Esta sucesión de intervalos cerrados y acotados es decreciente y

$$l(J_n) = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

El teorema del encaje nos permite afirmar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ único común a todos los J_n y tal que cualquier vecindad abierta de α contiene algún J_n.

Aseguramos que α es un punto de acumulación de C.

En efecto, cualquier vecindad de α contiene algún J_n de la sucesión y por lo tanto una infinidad de puntos de C. ♦

Nótese que α no tiene, necesariamente, que pertenecer a C, por ejemplo $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Si resulta molesta la frase de "continuar *ad infinitum* el procedimiento" en la demostración, podemos a partir de J_1 generar J_2 de la manera indicada y proceder por inducción, dado J_n generamos J_{n+1} como a partir de J_1 generamos J_2.

1.4. Teorema de Heine-Borel

En el principio del punto de acumulación usamos el teorema del encaje para acorralar al punto de acumulación en cuestión. Podemos emplearlo para demostrar propiedades globales por reducción al absurdo. Construimos una sucesión de intervalos suponiendo la negación de la propiedad a demostrar y llegamos a una contradicción a nivel local.

Para ilustrar este método probaremos una versión *ligera* del teorema de Heine-Borel. Adoptamos la disminución en aras de la claridad didáctica.

4.1. Teorema. (de Heine-Borel). *Consideremos el intervalo cerrado* $[a, b]$ *y supongamos que a cada punto* $x \in [a, b]$ *se le asocia*

una vecindad abierta $V(x)$. *Claramente*

$$\bigcup_{x\in[a,b]} V(x) \supseteq [a,b].$$

Aseguramos que basta una colección finita de estas vecindades para cubrir el intervalo $[a,b]$.

Demostración. Supongamos que no existe ninguna subcolección finita de las vecindades dadas que baste para cubrir el intervalo $[a,b]$.

Sea $J_1 = [a,b]$, su longitud es $l(J_1) = b-a$.

Dividimos J_1 por la mitad en los intervalos $[a,m_1]$ y $[m_1,b]$. Alguno de estos dos subintervalos no se podrá cubrir con un número finito de las vecindades dadas ya que de cubrirse ambos con un número finito de dichas vecindades, la unión, que es $[a,b]$, se podría cubrir con la suma de ellos. Sea J_2 dicho subintervalo. Tenemos que

$$J_1 \supseteq J_2 \quad \text{y} \quad l(J_2) = \frac{b-a}{2}.$$

Repitiendo el procedimiento localizamos J_3.

Por inducción generamos una sucesión de intervalos con las siguientes propiedades:

i) Cada J_n es tal que no basta una subcolección finita de las vecindades dadas para cubrirlo.

ii) $J_n \supseteq J_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

iii) $l(J_n) = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por el teorema del encaje existe $\alpha \in \mathbb{R}$ único, común a todos los J_n y cada vecindad de α contiene algún J_n.

Como $J_1 = [a,b]$ tenemos que $\alpha \in [a,b]$ y por lo tanto le está asociada una vecindad $V(\alpha)$. Pero *esta* $V(\alpha)$ contiene

algún J_n y $\{V(\alpha)\}$ constituye una subcolección finita de las vecindades dadas. Ella es suficiente para cubrir al incubrible J_n. ¡Hemos llegado a una contradicción! Por lo tanto la hipótesis de no existencia de la subcolección finita con la propiedad requerida es insostenible y el teorema se cumple. ♦

La importancia de la técnica del teorema del encaje para demostrar ciertas propiedades básicas no radica necesariamente en ser la más simple sino de las más didácticas porque mantiene presente la *continuidad* de los reales.

Presentamos otra demostración del teorema de Heine-Borel basada directamente en el axioma del supremo.

Consideremos las hipótesis del teorema anterior y definamos el conjunto C como el conjunto de puntos x *mayores* que a y *menores* o *iguales* que b con la propiedad de que el intervalo $[a, x]$ puede cubrirse con una subcolección finita de las vecindades dadas.

El conjunto C es no vacío. Basta seleccionar x en la vecindad correspondiente a a, además C está acotado superiormente por b.

Por el axioma del supremo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup C$.

Como b es cota superior de C, $\alpha \leqslant b$.

Mostraremos que no puede darse la desigualdad estricta; de ser así tendríamos la siguiente situación

Figura 1.2 El punto α está a la izquierda de b.

Consideremos la vecindad $V_\varepsilon(\alpha)$ asociada a α, el número $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de C, por lo tanto existe $c \in C$ tal que $\alpha - \varepsilon < c < \alpha$, como se muestra en la figura.

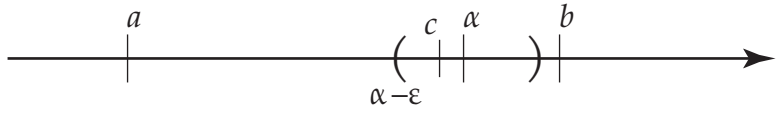


Figura 1.3 $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de C por lo tanto es excedido por algún $c \in C$.

Como $[a, c]$ puede cubrirse con un número finito de las vecindades dadas, $[a, b]$ también; es decir $\alpha \in C$. Como $\alpha < b$ existe $d \in [a, b]$ tal que

$$\alpha < d < \alpha + \varepsilon.$$

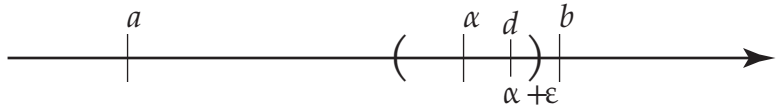


Figura 1.4 También se puede cubrir $[a, d]$.

Pero esto significa que $[a, d]$ podría cubrirse con las mismas vecindades que $[a, \alpha]$ contradiciendo el hecho de que α es cota superior de C.

Esto corrobora la imposibilidad de tener $\alpha < b$.

Por lo tanto $\alpha = b$, es decir el intervalo $[a, b]$ puede cubrirse con una subcolección finita de las vecindades dadas.

♦

Más adelante veremos otras modalidades de esta técnica.

Capítulo 2

Funciones continuas

En la sección anterior ilustramos una técnica de demostración basada en definir un conjunto no vacío y acotado superiormente que cumpla con cierta condición de la cual nos interesa verificar que satisface un intervalo. Si logramos concluir que el supremo de dicho conjunto es el extremo derecho del intervalo habremos completado la demostración.

El teorema del encaje se usa para acorralar algún punto con cierta propiedad o para, en base a negar la propiedad global a demostrar, generar una contradicción a nivel local.

Emplearemos estas técnicas para demostrar algunas propiedades básicas de las funciones continuas definidas en intervalos cerrados.

2.1. Teorema del valor intermedio

El teorema dice básicamente que si queremos ir de la parte negativa a la parte positiva de los números reales tenemos que pasar por el cero.

1.1. Teorema. (del valor intermedio). *Si* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua y* $f(a)f(b) < 0$ *entonces existe* $\alpha \in (a,b)$ *tal que* $f(\alpha) = 0$.

Demostración. Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $[a, b]$ es un intervalo donde la función cambia de signo. Le llamamos J_1.

Dividimos por la mitad a J_1. En alguno de los dos subintervalos la función cambia de signo. De no ser así tendríamos dos posibilidades.

i) La función no cambia de signo en cada intervalo, siendo negativa en el primero y positiva en el segundo. En este caso la función se anula en el punto de división y el teorema queda demostrado.

ii) La función mantiene el mismo signo en los dos subintervalos con lo cual no habrá cambio de signo en la unión, que contradice la hipótesis.

Llamemos J_2 a dicho subintervalo.

Repitiendo el procedimiento *ad infinitum* generamos una sucesión de intervalos $\{J_n\}$ con las siguientes propiedades:

i) La función cambia de signo en cada J_n,

ii) $J_n \supseteq J_{n+1}$,

iii) $l(J_n) = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por el teorema del encaje existe $\alpha \in \mathbb{R}$ único tal que

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

y cada $V(\alpha)$ contiene algún J_n. Aseguramos que $f(\alpha) = 0$.

Supongamos que $f(\alpha) > 0$. Elijamos $0 < \varepsilon < d\big(f(\alpha), 0\big)$. Por continuidad en α existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(V_\delta(\alpha)\big) \subseteq V_\varepsilon\big(f(\alpha)\big),$$

esto implica que f no cambia de signo en $V_\delta(\alpha)$.

Pero $V_\delta(\alpha)$ contiene algún J_n y f cambia de signo en J_n. Esto constituye una contradicción que vuelve insostenible la suposición de que $f(\alpha) > 0$.

De manera análoga podemos convencernos de la imposibilidad de que $f(\alpha) < 0$.

Sólo nos queda admitir que $f(\alpha) = 0$. ♦

Otra demostración del teorema del valor intermedio

Supongamos que $f(a) < 0$. Definamos el conjunto $C = \{x \in (a, b] : f \text{ es } < 0 \text{ en } [a, x]\}$. Veamos que $C \neq \emptyset$.

Si $0 < \varepsilon < |f(a)|$ por continuidad existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, lo cual implica que f es < 0 en $[a, x]$ para x tal que $|x - a| < \delta$.

C está acotado superiormente por b, por lo que podemos asegurar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup C$.

Aseguramos que $f(\alpha) = 0$.

Si $f(\alpha) < 0$ podríamos obtener, por ser f continua, para $0 < \varepsilon < |f(\alpha)|$ un número $\delta > 0$ tal que

$$x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon\big(f(\alpha)\big).$$

Es decir, existe x tal que $\alpha < x < \alpha + \delta$ con $f < 0$ en $[a, x]$ lo cual significa que $x \in C$ contradiciendo que α es cota superior de C.

Si $f(\alpha) > 0$, por continuidad, para $0 < \varepsilon < f(\alpha)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon\big(f(\alpha)\big).$$

Como $\alpha = \sup C$ entonces $\alpha - \delta$ no es cota superior de C, por lo tanto existe $c \in C$ con $\alpha - \delta < c < \alpha$ y $c \in (\alpha - \delta) \Rightarrow f(c) > 0$, pero $c \in C \;\Rightarrow\; f(c) < 0$ lo cual constituye una contradicción.

Por lo tanto $f(\alpha) = 0$. ♦

Variación (complicación) sobre el mismo tema

Supongamos definido el conjunto C de la demostración anterior y consideremos el conjunto B de las cotas superiores de C y $A = B^c$.

Fácilmente corroboramos que A y B constituyen una descomposición de $\mathbb{R}$ según el axioma de Dedekind. Sea α el corte. Aseguramos que $f(\alpha) = 0$.

Si $f(\alpha) < 0$ existe (por continuidad) $\alpha < c < \alpha + \delta$ tal que $f(c) < 0$. Como $\alpha < c$ entonces $c \in B$.

Sea $\alpha < c < d < \alpha + \delta$ con $f(d) < 0$, por lo tanto f es < 0 en $[a, d]$ y $d \in C$.

Es decir, encontramos un elemento de C que excede a c por lo cual c no es cota superior de C, es decir $x \in A$ contradiciendo que $A \cap B = \emptyset$.

Si $f(\alpha) > 0$ entonces es posible encontrar $\alpha - \delta < c < \alpha$ con $f(c) > 0$. Como $c < \alpha$ entonces $c \in A$.

Sea $\alpha - \delta < d < c < \alpha$ se tiene que $f(d) > 0$. Esto significa que f no permanece < 0 en $[\alpha, d]$ y por lo tanto c es cota superior de C, es decir $c \in B$, contradiciendo $A \cap B = \emptyset$.

No queda más que admitir que $f(\alpha) = 0$. ♦

2.2. Teorema de Bolzano

2.1. Teorema. (de Bolzano). *Si* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua entonces está acotada.*

Demostración. Supongamos que no es así, que f no está acotada en $[a, b] = J_1$.

Dividamos J_1 por la mitad, f no está acotada en alguno de los subintervalos pues si estuviera acotada en ambos estaría acotada en la unión. Sea J_2 dicho subintervalo.

Claramente

$$J_1 \supseteq J_2 \ \text{ y } \ l(J_2) = \frac{1}{2} l(J_1) = \frac{b-a}{2}.$$

Repitiendo el procedimiento generamos una sucesión de intervalos cerrados y acotados con las siguientes propiedades:

i) f no está acotada en cada J_n.

ii) $J_n \supseteq J_{n+1}$.

iii) $l(J_n) = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por el teorema del encaje existe $\alpha \in \mathbb{R}$ único tal que $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ y cada vecindad $V(\alpha)$ contiene algún J_n.

Por construcción $f(J_n)$ no está acotada.

Por continuidad $f(J_n) \subseteq V_\varepsilon\big(f(\alpha)\big)$.

Esta contradicción significa que la hipótesis de no acotamiento de f en $[a, b]$ es insostenible, por lo tanto se cumple el teorema. ♦

Otra demostración

Sea C el conjunto de puntos $a < x \leqslant b$ tales que f está acotada en $[a, x]$.

Aseguramos que $C \neq \emptyset$. En efecto, como f es continua en α, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(V_\delta(a) \cap [a, b]\big) \subseteq V_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Cada $x \in (a, a+\delta)$ cumple entonces con que f está acotada en $[a, x]$, es decir $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow x \in C$.

C está acotado superiormente (por b).

Por el axioma del supremo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup C$.

Como b es cota superior, $\alpha \leqslant b$.

Veamos la imposibilidad de que $\alpha < b$.

Como f es continua en α, f está acotada para cierta vecindad de radio δ de α.

Como $\alpha = \sup C$, existe $c \in C$ con $\alpha - \delta < c < \alpha$ y tal que f está acotada en $[a, c]$.

Existe a su vez d tal que $\alpha < d < \alpha + \delta$ y que f está acotada en $[c, d]$ lo cual nos permite asegurar que f está acotada en $[a, d]$ y que, por lo tanto, $d \in C$ contradiciendo que α es cota superior.

Tenemos entonces que $\alpha = b$. ♦

Variación

Consideremos el conjunto C de la demostración anterior y definamos el conjunto B de las cotas superiores de C y $A = B^c$.

Podemos fácilmente comprobar que A y B constituyen una descomposición de la recta según el axioma de Dedekind. Sea α el corte. Aseguramos que $\alpha = b$.

No podemos tener que $b < \alpha$ ya que eso significaría que $b \in A$ contradiciendo que b es cota superior de C.

Si $\alpha < b$ tenemos que por continuidad f está acotada en alguna vecindad de α de radio $\delta > 0$.

Como $\alpha - \delta < \alpha$, $\alpha - \delta \in A$, es decir que no es cota superior de C, por lo tanto existe $c \in C$ tal que $\alpha - \delta < c < \alpha$. Si $\alpha < d < \alpha + \delta$ entonces f está acotada en $[c, d]$. Por lo tanto f está acotada en $[a, d]$ y $d \in C$. Como $\alpha < d$ entonces $d \in B$. Es decir, d es cota superior de C. Pero si $\alpha < d < d' < \alpha + \delta$ tendremos que $d' \in C$ concluyendo que d no es cota superior de C. Por lo tanto $d \in A$ lo cual contradice que $A \cap B = \emptyset$.

Concluimos entonces que $\alpha = b$. ♦

Otra más

Si f no fuera acotada en $[a, b]$ entonces podríamos generar una sucesión $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in [a, b]$ tal que $f(\{x_n\})$ no fuera

acotada, por ejemplo, dado $n \in \mathbb{N}$ existiría $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$.

Como $\{x_n\}$ es un conjunto infinito y acotado, por el principio del punto de acumulación de Bolzano-Weierstrass, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es punto de acumulación de $\{x_n\}$ y podemos extraer una subsucesión de $\{x_n\}$ que converja a α; por continuidad, la imagen bajo f de esa sucesión convergerá a $f(\alpha)$.

Es decir, habría puntos muy cerca de α cuya imagen estaría lejísimos de $f(\alpha)$. ¡Contradicción! ♦

2.3. Teorema del máximo

3.1. Teorema. (del máximo). *Si* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua entonces alcanza su máximo.*

Demostración. Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces está acotada. Sea $\beta = \sup f\big([a, b]\big)$.

Supongamos que f no alcanza su máximo.

Esto significaría que $\beta - f(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Siendo así podríamos definir

$$g(x) = \frac{1}{\beta - f(x)}$$

en $[a, b]$.

Esta función es continua en $[a, b]$ y por lo tanto está acotada. ¡g está acotada!

Pero $\beta = \sup f\big([a, b]\big)$ significa que $\beta - \varepsilon$ no es cota superior de $f\big([a, b]\big)$ y por lo tanto es posible encontrar x tal que $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta$, de aquí $\beta - f(x) < \varepsilon$ y

$$\frac{1}{\beta - f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Es decir, existe $x \in [a, b]$ tal que $g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Es decir, g toma valores tan grandes como se quiera. ¡g no está acotada! ♦?

Otra

Sea $\beta = \sup f\big([a,b]\big)$ y $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Los $\beta - \varepsilon_n$ no son cota superior de $f\big([a,b]\big)$ por lo tanto existen $\beta - \varepsilon_n < f(\xi_n) < \beta$, esto significa que existen $\xi_n \in [a,b]$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = \beta$. El conjunto de puntos que forman la sucesión $\{\xi_n\}$ tiene algún punto de acumulación ξ y podemos seleccionar una subsucesión $\{x_n\} \to \xi$. Claramente $f(x_n) \to \beta$. Por continuidad $f(\xi) = \beta$.

♦

2.4. Teorema de la continuidad uniforme

4.1. Teorema. *Si* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua entonces es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x \in [a,b]$ existe $U(x)$ tal que $f\big(U(x)\big) \subseteq V_\varepsilon\big(f(x)\big)$.

Asociemos a cada $x \in [a,b]$ una vecindad $V(x)$ cuyo radio sea igual a la mitad del radio de la $U(x)$ correspondiente.

Por el teorema de Heine-Borel, basta una subcolección finita de esas vecindades para cubrir $[a,b]$.

Sean dichas vecindades $V(x_1)$, ..., $V(x_n)$ con radios δ_{x_1}, ..., δ_{x_n}.

Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_{x_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Aseguramos que δ garantiza las condiciones de la continuidad uniforme para la ε dada. Para ello consideramos x' y $x'' \in [a,b]$ tales que $|x' - x''| < \delta$.

Como $\bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) \supseteq [a,b]$, existe x_r tal que $x' \in V(x_r)$, es decir $|x' - x_r| < \delta_{x_r}$. Ahora,

$$\begin{aligned} |x'' - x_r| &= |x'' - x'| + |x' - x_r| \\ &\leqslant |x'' - x'| + |x' - x_r| \\ &< \delta + \delta_{x_r} \\ &\leqslant 2\delta_{x_r} = \text{radio de } U(x_r). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $x', x'' \in U(x_r)$. Por lo tanto

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Es decir, f es uniformemente continua. ♦

N.B. Estrictamente la situación en el penúltimo renglón del párrafo anterior es

$$|f(x') - f(x_r)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x'') - f(x_r)| < \varepsilon,$$

por lo tanto

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_r)| + |f(x_r) - f(x'')| < 2\varepsilon$$

lo cual igualmente prueba el teorema.

Bibliografía

Landau, Edmund. *Differential and Integral Calculus*. Trad. por Melvin Hausner y Martin Davis. New York: Chelsea Publishing Company, 1951. URL: https://www.maa.org/press/maa-reviews/differential-and-integral-calculus.

— *Foundations of Analysis. The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers*. Trad. por F. Steinhardt. New York: Chelsea Publishing Company, 1951. URL: https://bookstore.ams.org/chel-79/.

López Mateos, Manuel. *Conjuntos, lógica y funciones*. México: MLM-editor, 2018. URL: https://clf.mi-libro.club.

— *Funciones reales*. México: López Mateos Editores, 2018. ISBN: 978-6079558390. URL: https://funrel.mi-libro.club/.

— *Matemáticas Básicas*. 2a. 2018. URL: https://matbas.mi-libro.club/ (visitado 10-10-2018).

Índice alfabético

acorralar, 14
acotado
    inferiormente, 6
    superiormente, 6
ad infinitum, 10, 15
arquimediano, 1
axioma
    de Dedekind, 4
    del supremo, 3, 4, 6, 12

Bolzano, 8, 17
Borel, 10

cambia de signo, 15
campo ordenado, 1
colas de nueves, 1
complemento, 4
completez, 3
continuidad, 1, 15
continuo, 1
contradicción, 12
cota
    inferior, 6
    superior, 6
Courant, 8
cubrir, 11

Dedekind, 1
denso, 1
descomposición, 2, 4, 17

expansiones decimales, 1
extremos
    derechos, 6
    izquierdos, 6

función acotada, 17
funciones continuas, 1, 14

Heine, 10
huecos, 2

incubrible, 12
inducción, 11
infinidad, 9
insostenible, 12
intervalos
    acotados, 6
    cerrados, 6
introducción, iv

Landau, 3
longitud, 11

mínimo, 2, 5
máximo, 2, 5

números reales, 1

punto de acumulación, 8, 10, 20
punto de corte, 3

racionales, 1
recta real, 1

subcolección finita, 11, 13

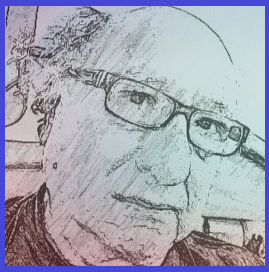
subintervalos, 9, 15
sucesión
    de intervalos, 6
    decreciente, 6
supremo, 1

teorema
    de Bolzano, 17
        otra demostración, 18
        otra más, 19
        variación, 19
    de Bolzano-Weiertrass, 9
    de Heine-Borel, 10, 21
    de la continuidad uniforme, 21
    del encaje, 5, 8, 10–12
    del máximo, 20
        otra demostración, 21
    del valor intermedio, 14
        otra demostración, 16
        variación, 17

unicidad, 7

valor intermedio, 14
vecindad, 12
    abierta, 7

Weierstrass, 8



Manuel López Mateos inició su actividad docente en 1967 en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha impartido cursos de Cálculo diferencial e integral, Análisis matemático, Algebra lineal y Topología diferencial, entre otros. En particular, en el año de 1972, impartió, en el entonces Centro de Didáctica de la UNAM, Cursos de capacitación para la primera generación de profesores de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM. Ha traducido más de 15 importantes libros de texto de matemáticas. En el año de 2003, fue el director fundador de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.

Encuentro útil este material para ilustrar ciertas técnicas de demostración usadas en análisis elemental. Para demostrar teoremas básicos sobre funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, se emplean razonamientos basados en el axioma del supremo, en el teorema del encaje y en una versión infantil de las cortaduras de Dedekind.

ISBN 978-607-95583-7-6

López Mateos editores

• https://propbas.mi-libro.club/